De produktie van geautomatiseerde rekenkennis[1]

Jan J. Elshout
Faculteit der Psychologie
Universiteit van Amsterdam

Marisca Milikowski[2]
Faculteit der Psychologie
Universiteit van Amsterdam

1. Samenvatting
Ons vermoeden dat rekenervaring zich vastzet in de vorm van een veranderde mentale representatie van de getallen waarmee is gewerkt, hebben wij getoetst in een associatie-experiment. Stimuli waren alle getallen van 1 tot en met 100, ingedeeld volgens bepaalde ervaringskarakteristieken: klein en groot, meer en minder goed deelbaar. Bij een proefgroep van 18 personen werd de score van elk getal bepaald op een drietal maten, ondermeer ontleend aan onderzoek naar woordassociaties. De resultaten van de op de scores uitgevoerde ANOVA's zijn hoogst significant. Kleine getallen zijn gemiddeld sterker gerepresenteerd dan grote en getallen uit de tafels van vermenigvuldiging komen sterker uit de bus dan priemgetallen. Bovendien blijken sterker gerepresenteerde getallen er rekenkundig slimmere associatieve relaties op na te houden. De gevonden resultaten zullen door ons worden benut bij de ontwikkeling van een associatietest, die rekenprestaties kan voorspellen.

2. Inleiding
Het hier beschreven experiment vormt het beginpunt van ons onderzoek naar de werking van geautomatiseerde kennis, in het bijzonder rekenkennis. Kenmerkend voor geautomatiseerde processen is dat ze geen of weinig aandacht vergen en snel verlopen, volgens een patroon dat zich niet tussentijds laat wijzigen. (Zie Shiffrin en Schneider, 1977). Het automatisch, of deels automatisch, kunnen oplossen van eenvoudige rekenopgaven is een belangrijke verworvenheid. Oudere leerlingen en goede rekenaars onderscheiden zich door kortere reactietijden op de 'numberfacts',

[1] Verschenen in: In M. Boekaerts & E. de Corte (Eds.). Onderwijsleerprocessen, ORD 1990 (pp. 199-209). Nijmegen: ITS.

[2] Huidig adres: Rekencentrale, Bredeweg 13, 1098BL Amsterdam.

zoals de verzameling van alle eencijferige optellingen wordt genoemd. (Hamann en Ashcraft, 1985; Geary et al, 1988). Het correct en automatisch kunnen combineren van getallen is bovendien van invloed op het oplosproces van redactieopgaven (Milikowski, 1988).

De aanwezigheid van omvangrijke, automatisch activeerbare kennisstructuren wordt nu ook algemeen aanvaard als verklaring voor de verschijnselen die behoren bij expertise op tal van terreinen. Of men nu spreekt van patroonherkenning of van forward reasoning, steeds gaat het om een complex van zeer snelle, moeiteloos verrichte en adequate transformaties. Even algemeen groeit dan ook de behoefte aan meer inzicht in de organisatieprincipes van deze kennis die we expertise noemen. Hier doet zich echter het lastige feit voor dat juist de snelheid van het proces het onderzoek naar de structuur ervan bemoeilijkt. Kennis zoals hier bedoeld manifesteert zich in het denkonderzoek immers juist als een afwezigheid: er is een automatisch oplosproces, dus geen probleem, dus geen protocol-tekst. (Zie Elshout, 1976). De structuren die wij op het oog hebben vormen in zekere zin het onzichtbare complement van elk probleemoplossingsproces.

Ze kunnen echter ook worden beschouwd als het produkt ervan. Al probleemoplossend worden nieuwe mentale verbanden geconstrueerd, die hun sporen nalaten in de organisatie van het kennisbestand. Oplossingen die eens met veel moeite en inspanning tot stand werden gebracht consolideren zich; wankele structuren waarmee men bij herhaling werkt worden stabiel, dat wil zeggen: hun toepassing verloopt snel en automatisch.

Domeinkennis is zo beschouwd de neerslag van taakervaring, in de vorm van een veranderd patroon van associaties. Zo ziet ook Siegler het, die een met succes op de computer uitgeprobeerd model publiceerde voor de automatisering van de eencijferige vermenigvuldigingen, oftewel de tafels (Siegler, 1988, 1989). Het leren van de tafels begint in dit model van Siegler met tellen en rekenen en eindigt met de automatische produktie van het juiste antwoord. Wat zich al rekenende in de loop der tijd ontwikkelt is de spreiding van de associaties die een bepaalde som oproept. Is deze voldoende gepiekt ten gunste van het goede antwoord, dan wordt dit antwoord automatisch geproduceerd. De gewaarwording is er een van 'weten'. Een minder gepiekte spreiding van activatie over mogelijke antwoorden wordt ervaren als 'nog niet zeker weten'. Het systeem valt dan terug op de back-up strategie van tellen en rekenen. Zo wordt alsnog het juiste antwoord geconstrueerd, dat door deze actie een sterkere - misschien nu voldoende sterke - associatieve binding met de opgave krijgt.

Dit model van Siegler heeft een aantal aantrekkelijke eigenschappen. Het verklaart bijvoorbeeld waarom ook als de numberfacts geautomatiseerd heten te zijn, de reactietijden oplopen met de grootte van het te produceren antwoord. Siegler's model verklaart dit verschijnsel door de risico's van het langere produktieproces: hoe meer stappen dit vergt, des te groter de kans is op fouten. Gemaakte vergissingen worden op associatief niveau verwerkt en belemmeren de automatisering. Een ander pluspunt van dit model is dat het verstand wordt betrokken in de aanmaak van een associatieve structuur. Het automatiseren van de kennis van de tafels is in dit model niet een produkt van 'stampen', maar van intelligente rekenarbeid.

De koppeling van opgaven aan antwoorden is in onze ogen als eindresultaat van een dosis rekenonderwijs echter te beperkt. Wij zijn op zoek naar een model dat rekenervaring kan verdisconteren op een wijze die economischer is en meer transfermogelijkheden biedt. Het gaat ons om een model waarin ervaring wordt verwerkt binnen een kennisorganisatie die 'automatisch' anticipeert op een veelheid van taken binnen het bewuste domein, en zo dus waarlijke expertise vertegenwoordigt.

In het nu te bespreken experiment, dat een verkennend karakter draagt, willen wij onderzoeken in hoeverre rekenkennis zich laat uitdrukken in de vorm van getalskennis. Rekenervaring, menen wij, zal zich ondermeer doen gelden in de vorm van een veranderde mentale representatie van de getallen waarmee is gewerkt, en in een veranderde associatieve band tussen bepaalde getallen onderling. Getallen waarmee vaak wordt gewerkt zullen verhoudingsgewijs 'sterk' zijn gepresenteerd; daarnaast zullen getallen een patroon van associaties vertonen dat meer 'gepiekt' zal zijn naarmate in het rekenproces een bepaalde combinatie vaker wordt gemaakt.

De onafhankelijke variabelen in het verrichte associatie-experiment met als stimuli alle getallen van 1 tot en met 100 zijn dus bepaalde, door ons vermoede, ervaringskarakteristieken van deze getallen. We werken met een aantal grove indelingen: kleine getallen versus grote, beter deelbare versus minder goed deelbare getallen. Deze indelingen zijn ontleend aan een (zeer globale) analyse van het domein, en van de schoolse rekenervaring. Afhankelijke variabelen zijn de scores van deze getallen op een aantal maten, die informatie geven over de sterkte van hun representatie (bij de bewuste groep proefpersonen) en over de betrouwbaarheid en spreiding van hun associatieve banden. Om te beginnen wordt van elk getal de 'meaningfulness' volgens Noble (1963) bepaald. Meaningfulness (de zogenoemde m-score) wordt dikwijls gebruikt om informatie te geven over de representatie van woorden en begrippen in het geheugen. De m-score is gedefinieerd als het aantal associaties dat een woord oproept binnen een bepaalde tijdseenheid. Behalve deze m-score berekenen wij van elk der stimulus-getallen een p-score. Deze verwijst naar prominentie van representatie en geeft de frequentie weer waarmee een getal als associatie werd genoemd, berekend over het hele experiment . Tenslotte bepalen wij van elk getal de 'winnende relatie' volgens twee criteria. Eerst wordt binnen het geheel van associaties dat een getal oproept de vaakst voorkomende bepaald. Vervolgens wordt bij elk getal bepaald welke van zijn associaties het vaakst als eerste wordt genoemd.

Samenvattend: wij willen de organisatie van geautomatiseerde rekenkennis doormeten met behulp van een associatie-experiment. Wij verwachten dat ervaring bepalend is voor de mate waarin eigenschappen van getallen die bij het rekenen een rol spelen ook vertegenwoordigd zijn op geautomatiseerd kennisniveau.

3. Opzet van het onderzoek.

18 Personen, allen eerstejaarsstudenten psychologie aan de universiteit van Amsterdam, fungeerden als proefpersonen in ons associatie-experiment. De stimuli waarop zij reageerden vormden de getallen 1 tot en met 100. De proefpersonen kregen de stimuli aangeboden in de vorm van boekjes, waarin de getallen in een voor elke proefpersoon verschillende random volgorde waren geschikt. Elk getal stond op een afzonderlijke bladzijde. In de instructie werd het aangeboden getal het sleutelgetal genoemd. De taak van de proefpersonen was, aldus de instructie, om onder elk sleutelgetal gedurende 30 seconden zoveel mogelijk associaties te noteren in de vorm van andere getallen. Daarbij werd de aansporing gegeven om na elke genoteerde associatie weer even in gedachten terug te gaan naar het sleutelgetal; dit om zogeheten ketenassociaties te bemoeilijken. Tijdens het experiment werd de tijd bijgehouden door middel van een stopwatch. Iedereen sloeg tegelijk een nieuwe bladzijde op. Tijdens het experiment werden twee korte pauzes gehouden.

4. Resultaten

4.1. Meaningfulness

Gezamelijk produceerden de 18 proefpersonen een totaal van 14503 associaties, hetgeen neerkomt op een gemiddelde van 145 per getal, met een standaarddeviatie van 12,9. De hoogste m-score werd geboekt door het getal 12, dat in totaal 183 associaties opriep. De laagste werd geboekt door het getal 67, waarbij de groep proefpersonen slechts 117 associaties gaf.

Er is een negatieve correlatie tussen getalsgrootte en 'meaningfulness': $R = -.407$.

Dat effekt is ook te zien in een ANOVA op de gemiddelde m-scores van vier groepen getallen, ingedeeld naar grootte.(zie tabel 1). Het totaal van verschillen is significant: $F(3,96) = 7{,}08$ ($p < 0{,}002$). Volgens de toets van Scheffé zijn van de verschillen tussen de groepen onderling alleen die tussen a en c en tussen a en d significant ($p < .05$). Het zijn dus de kleinste getallen die verschillen van de overige.

Tabel 1. Gemiddelden en standaarddeviaties van m- en p-scores van vier groepen ingedeeld naar getalsgrootte

Groep	Aantal	m-gemid.	Std. dev.	p-gemid.	std. dev.
a: 1-25	25	153,8	12,06	263	136,05
b: 26-50	25	145,08	11,88	87,2	46,82
c: 51-75	25	142,08	11,86	59,84	40,52
d: 76-100	25	139,16	11,76	65	52,38

Een hergroepering van de getallen naar rekenkundig bepaalde categorieën blijkt het meaningfulness-effekt nog te vergroten (zie de tabellen 2 en 3). De gemaakte indeling is als volgt: c = cijfers; t = tientallen; taf = getallen die voorkomen in de tafels, voorzover niet al ondergebracht in c of t; p = priemgetallen voorzover niet c; r = restgetallen). Een ANOVA op verschillen in gemiddelde m-scores van deze groepen laat het volgende beeld zien: $F(4,95) = 10,93$ ($p<0,0001$). Groep t (tientallen) scoort het hoogst, daarna c(ijfers), taf(els), r(rest) en p(riem). Volgens de toets van Scheffé leveren zes van de tien vergelijkingen significante verschillen in m-scores op ($p<0,05$).

Tabel 2 Gemiddelden en standaarddeviaties van m- en p-scores van vijf groepen, ingedeeld naar getalssoort.

groep	aantal	m-gemid.	std. dev.	p-gemid.	std. dev.
c: cijfers	9	151,33	5,81	413,33	74,05
t: tientallen	10	160,6	12,60	190,7	51,49
taf: tafel	33	148,182	11,58	117,06	64,89
p: priem.	22	137,636	10,01	54,27	40,48
r: rest	26	139,115	11,41	45,85	16,46

4.2 Prominentie

De tweede maat die wij in dit onderzoek hanteren is de p-score, waarbij p staat voor prominentie. De p-score van een getal is de frequentie waarmee het als associatie werd genoteerd over het gehele experiment genomen.

De spreiding van de p-scores biedt een heel ander aanzien dan die van de m-scores. Het gemiddelde is 118, met een standaarddeviatie van maar liefst 114,8. (Bij de m-scores was de SD 12,9). Het prominentst gerepresenteerde getal is 2, met een p-score van 533; het minst prominent is 79 vertegenwoordigd, met een p-score van 20.

In welke mate hangt prominentie samen met getalsgrootte?

Er blijkt een vrije sterke correlatie te bestaan tussen getalsgrootte en p-scores: R= .427.(Zie tabel 6). De uitgevoerde ANOVA's (op groepen a, b, c en d ingedeeld naar getalsgrootte en groepen c, t, taf. p en r ingedeeld naar getalssoort) leveren hoge F-waarden op.

De ANOVA op gemiddelde p-scores van groepen naar grootte geeft een F(3,96) van 37,42 (p<0,0001). Volgens de toets van Scheffé verschilt groep a (cijfers) van elk der overige (p<0,05). De andere verschillen zijn niet significant, maar gaan wel in de verwachte richting.

Getalssoort (indeling in vijf groepen) blijkt, net als bij meaningfulness, een criterium dat nog beter voorspelt dan grootte zonder meer: F(4,95) = 103,56 (p< 0,0001). Verreweg het best scoren de cijfers, dan de tientallen, dan de tafels, dan de priemgetallen en tenslotte de restgroep (zie tabel 2). Van de tien mogelijke vergelijkingen zijn er volgens de toets van Scheffé negen significant; alleen de priemgetallen en de restgroep scoren volgens deze toets even laag. Tabel 3 geeft een overzicht van de uitgevoerde ANOVA's en de daarbij gevonden F-waarden.

Tabel 3. Overzicht van de uitgevoerde ANOVA's.

grootte, m-score	df1=3, df2=96	F= 7,078	p<0,0002
grootte, p-score	df1=3, df2=96	F= 37,418	p<0,0001
soort, m-score	df1=4, df2=95	F= 10,926	p<0,0001
soort, p-score	df1=4, df2=95	F=103,561	p<0,0001

In kolom 1 worden de gehanteerde variabelen gegeven. Grootte: indeling van getallen in 4 groepen.(Zie tabel 1) Soort: indeling in 5 groepen(Zie tabel 2). M-score: aantal bij getal geproduceerde associaties. (Zie tabellen 1 en 2)..P-score: frequentie waarmee getal als associatie wordt genoemd (Zie tabellen 1 en 2).

4.3. Associatiepatronen

Van elk getal werd de primaire associatie vastgesteld, op twee manieren. Ten eerste werd bepaald welk getal in de bij elk sleutelgetal gegeven 30 seconden het vaaks als associatie werd genoemd: dat is de 'winnaar algemeen'. Ten tweede werd bepaald welke associatie bij een bepaald getal het meest frequent als eerste werd genoemd: dat is de 'winnaar eerste plaats' . Soms moesten associaties het winnaarschap delen.

De boven beschreven operatie levert een verzameling eenvoudig te karakteriseren getalparen op; vijf eigenschappen zijn voldoende om elk der winnende relaties te kunnen typeren.(zie tabel 4). Hier volgt een beschrijving.

1. De associatie is een deler van het sleutelgetal. Voorbeelden: 9-3, 40-20;
2. Ze is er een veelvoud van. Voorbeelden: 11-22, 45-90;
3. Er is sprake van een gelijkenis voor het oog; de associatie is een van de cijfers van het sleutelgetal. Bijvoorbeeld: 69-9, 61-6;
4. De associatie is een buurman van het sleutelgetal. Voorbeelden: 19-20, 59-60;
5. Ze vormt een combinatie van de cijfers van het sleutelgetal: 62-8, of 93-12.

Vaak worden winnende relaties gekenmerkt door twee van de vijf eigenschappen (zie tabel 4). Delerschap bijvoorbeeld gaat dikwijls samen met een gelijkenis voor het oog. (Denk aan 30-3, zowel als 31-1). Voorzover zij niet door 'voor het oog' gelijkenissen worden ondersteund zijn delers als winnende associatie meestal helften of wortels; veelvouden zijn dikwijls dubbelen of kwadraten.

tabel 4. Frequentieverdeling van de vijf kenmerkende eigenschappen.

winnaars algemeen		winnaars 1ste pl.	
deler	62	zichtrelatie	69
zichtrelatie	50	deler	37
combinatie	14	veelvoud	29
veelvoud	12	buur	7
buur	3	combinatie	6
totaal*	141	totaal*	148

* Verscheidene relaties laten zich karakteriseren door meer dan een eigenschap.

Wij hebben de winnende associaties in twee groepen verdeeld: meer en minder rekenkundig produktieve. Meer produktief zijn volgens ons associatief vastgelegde deel- en veelvoudsrelaties; minder produktief achten wij relaties die zich slechts laten kenmerken door een van de overige eigenschappen Op grond van deze redenering hebben wij de getallen dichotoom gescoord. Vervolgens hebben wij de correlatie vastgesteld tussen de m- en p-scores van een getal en de, in 1 of 0 uitgedrukte, produktiviteit van zijn associatieve relaties. De berekening werd verricht voor het 'winnaarschap algemeen' zowel als voor het 'winnaarschap eerste plaats' (zie tabel 5).
De m-score van een getal blijkt te correleren met de produktiviteitsscores van zijn beide winnende relaties, maar het sterkst met die van het 'winnaarschap eerste plaats'. De R's zijn respectievelijk .349 en .463.

De correlaties van p-scores met produktiviteitsscores zijn voor beide winnaarschappen sterker, maar ook hier komt het 'winnaarschap eerste plaats' als betere voorspeller uit de bus. De R's zijn .408 en .628. Zie voor een overzicht tabel 5.

Tabel 5. Overzicht van berekende correlaties

grootte met m-score	R = -.407
grootte met p-score	R = -.608
m-score met nut alg.	R = .349
m-score met nut 1ste pl.	R = . 463
p-score met nut alg	R = . 408
p-score met nut 1ste pl.	R = . 628

5. Discussie

De eerste conclusie die we uit deze resultaten kunnen trekken is dat er inderdaad psychologische verschillen bestaan tussen de door ons bestudeerde getallen. Kleine getallen zijn gemiddeld sterker gerepresenteerd dan grote. Kleinere getallen roepen meer associaties op en scoren dus hoger op 'meaningfulness'. Hoe kleiner een getal, des te frequenter het optreedt als associatie bij andere getallen. Op deze laatste maat, die we de p-score noemen, zijn de verschillen tussen grote en kleine getalen wel bijzonder groot. De groep kleinste getallen, de cijfers, zijn verreweg het prominentst vertegenwoordigd.

Als wij kijken naar de associatiepatronen die zich in dit onderzoek aftekenen wordt duidelijk waar de cijfers deze prominentie aan ontlenen.Veel getallen blijken te worden gerepresenteerd in termen van cijfers. Er zijn twee soorten cijfer-associaties. De eerste geeft gestalte aan een rekenkundig interessante relatie (een getal met zijn deler), de tweede behelst wat wij noemden een 'zichtrelatie': een associatie van een getal met een van zijn samenstellende cijfers.(zie tabel 4).

In kennis krijgen samenhangen en gelijkenissen gestalte die zich aan het blote oog onttrekken. Men ziet dat ook in dit onderzoek. 'Bekendere' getallen, dat wil zeggen getallen met een hogere m- of p-score, blijken er zinniger associatieve relaties op na te houden (zie tabel 2). Ze worden psychologisch sterker zowel als rekenkundig slimmer gerepresenteerd.

De drie maten die wij in dit experiment hebben beproefd: m-score, p-score, en rekenkundige produktiviteit van primaire associaties, willen wij ook in vervolgexperimenten benutten. Het belang voor het onderwijs schuilt hem ondermeer hierin: uitgaande van de veronderstelling dat rekenervaring zich zal uitdrukken in meer 'bekendheid' van meer getallen, willen wij met behulp van de genoemde maten een associatietest ontwikkelen die rekenprestaties kan voorspellen.

6. Literatuur

Chi, M.T.H., Glaser, R. , Farr, M.J. (1988). The Nature of Expertise. Hillsdale: New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Elshout, J.J. (1976). Karakteristieke moeilijkheden in het denken. Academisch proefschrift, Universiteit van Amsterdam.

Geary, D.C., Widaman, K.F., Little, T.D., Cormier, P. (1987). Cognitive addition: comparison of learning disabled and academically normal elementary school children. Cognitive Development ,2, 249-270.

Hamann, M.S., Ashcraft, M.H. (1985). Simple and complex addition across development. Journal of Experimental Child Psychology , 40, 49-72.

Milikowski, M. (1987). Andere getallen, andere strategieën. Memorandum 88 van het VF-project 'Kennisontwikkeling in formele domeinen'. Faculteit der Psychologie, Universiteit van Amsterdam.

Noble, C.E.(1963). Meaningfulness and familiarity. In: Cofer, C.N. & Musgrave, B.S. (eds). Verbal behavior and learning: problems and processes. New York: McGraw-Hill.

Russell, H. L., Ginsburg, H.P. (1984). Cognitive analysis of children's mathematical difficulties. Cognition and Instruction 1, 2, 217-244.

Shiffrin, R.M. & Schneider, W. (1977). Controlled and automatic human information processing: ll. Perceptual learning, automatic attending and a general theory. Psychological Review, 84., 127-189.

Siegler, R.S. (1988). Strategy choice procedures and the development of mutliplication skills. Journal of Experimental Psychology: General, 117, 258-175.

Siegler, R.S. (1989). Mechanisms of cognitive development. Annual Review of Psychology 1989, 40: 353-379.