Ruijterveer 21 1506 ER Zaandam 075-6315408 REKENEN@XS4ALL.NL

KOLOMSGEWIJS REKENEN: TERUG NAAR DE TWAALFDE EEUW

Rob Milikowski

Het kolomsgewijs rekenen heeft in het Nederlandse basisonderwijs voor een belangrijk deel de plaats ingenomen van de klassieke rekenalgoritmes. Het voornaamste argument is dat daarmee het inzicht in het rekenen groter wordt. Dat wordt in dit hoofdstuk nader onderzocht.

Inleiding

De ouders van de basisschool De Zwaluw hadden de nodige vragen over de wijze waarop hun kinderen rekenden en kregen in augustus 2005 onderstaande brief over de wijze waarop het in zijn werk gaat (De Zwaluw, 2005):

Het kolomsgewijs rekenen en cijferen in Pluspunt

In onze rekenmethode *Pluspunt* rekenen de kinderen op een andere manier dan u waarschijnlijk vroeger heeft geleerd. Wij hebben als leerkrachten gemerkt dat dit vaak tot verwarring leidt thuis. Het volgende stuk gaat met name over het kolomsgewijs rekenen vanaf groep 5.

Het kolomsgewijs rekenen is een tussenvorm tussen het hoofdrekenen en het rekenen op papier (cijferen).

In groep	*optellen:*	*aftrekken:*
3 en 4	rijgen, splitsen, handig rekenen	idem
5	eerst van links naar rechts tussen streepjes en dan met het HTE*-schema van links naar rechts	van links naar rechts met tekorten

6	kinderen zijn vrij om richting te kiezen	van links naar rechts
7	van rechts naar links (van klein naar groot)	van rechts naar links

bewerkingen op papier / cijferen idem

* H = Honderdtal
T = Tiental
E = Eenheid

Tot zover de brief aan de ouders van basisschool De Zwaluw. Het is geen wonder dat er thuis bij de leerlingen van deze school de nodige verwarring was ontstaan. Die verwarring beperkt zich ook niet tot de ouders van De Zwaluw. De rekenboeken van tegenwoordig zijn voor velen onbegrijpelijk geworden. Ouders kunnen hun kinderen op de basisschool ook vaak niet meer helpen met het rekenen. Bovendien: ouders die volgens de traditionele methoden naar eigen tevredenheid hebben leren rekenen, kijken soms vreemd op als ze vernemen dat hun rekenvaardigheid gebaseerd is op trucjes die het ware rekenen aan het oog onttrekken.

Het kolomsgewijs rekenen voor het basisonderwijs is uitgewerkt in het TAL-project. TAL staat voor 'Tussendoelen Annex Leerlijnen' voor het basisonderwijs. De TAL-aanpak wordt beschreven in *Kinderen leren rekenen* uit 2000 van het Freudenthal Instituut (FI) en de Stichting Leerplan Ontwikkeling (SLO). Het project is geïnitieerd door het ministerie van Onderwijs Cultuur en Wetenschappen (Van den Heuvel-Panhuizen e.a., 2000).

Aanvankelijk konden scholen nog kiezen uit rekenmethoden met verschillende rekenmethodieken. Maar in 2001 sloeg met het geld het noodlot toe. Op 1 januari werd de euro ingevoerd en moesten alle rekenmethoden met nieuwe boeken komen waar de kwartjes en dubbeltjes uit waren verdwenen en de euro zijn intrede had gedaan. Al deze nieuwe boeken hanteren varianten van het kolomsgewijs rekenen. Geen wonder, gezien het overheidsstempel dat hier op staat. Alleen *De wereld in getallen* doet daar slechts in beperkte mate aan mee.

In *Kinderen leren rekenen* wordt beschreven wat TAL onder kolomsgewijs rekenen verstaat (Treffers e.a., 2000):

> 'Kenmerkend voor het kolomsgewijs rekenen is niet zozeer de verticale schrijfwijze van de opgave, als wel de splitsende rekenwijze met positiegetallen bij het berekenen van deeluitkomsten, werkend van groot-naar-klein, van links-naar-rechts. Dit in tegenstelling tot

cijferen waarbij van klein-naar-groot, van rechts-naar-links, met positiecijfers wordt gerekend.’

We gaan nu op verschillende aspecten van dit kolomsgewijsrekenmodel in; allereerst op de hier als kenmerkend beschreven links-rechtskwestie.

Van links naar rechts

Bij het tellen, de eerste omgang van kinderen met getallen, wordt een getal opgebouwd van klein naar groot. Tellen is het begin van het rekenen: 1, 2, 3, … 7, 8, 9, 10, ... Het onderliggende mechanisme van het rekenen in het plaatswaardestelsel is altijd van rechts naar links. Als kinderen ook op papier leren tellen zetten ze na de 9 de 1 een plaats naar links, en waar de 9 stond komt de 0 te staan. Bij het volgende getal, de 11, wordt er vanaf de 0 verder geteld. Bij de 19 gaat het weer net zo. Er wordt naar het cijfer links gekeken. Tellen daar weer 1 bij op en ze kunnen weer even voort. Zo gaat het bij de 99 verder. Daar moet twee keer een stap naar links worden gedaan totdat er 100 staat. Zouden kinderen als ze bij de linker 9 één optellen denken ik tel nu bij 9 tientallen 1 tiental op? Nee, ze zijn enthousiast dat ze tot 100 kunnen tellen.

Bij terugtellen gaat het al net zo: 23, 22, 21, 20. Verder dan 0 kan er niet teruggeteld worden, dus wordt weer de hulp van de linker buurman gevraagd: er wordt een tiental opgehaald en uitgepakt. Enzovoort. Tellen in het plaatswaardestelsel gaat dus van klein naar groot, van rechts naar links. Het terugtellen gaat eveneens van rechts naar links. Dat is de eerste vorm van rekenen waarmee kinderen in aanraking komen. Het klassieke optelalgoritme sluit bij de systematiek van het tellen aan en beweegt zich derhalve ook van rechts naar links. Hetzelfde geldt voor het aftrekken. Evenzo het vermenigvuldigen, dat optellen in grotere stappen is. Het is een voortbouwen in het formele systeem waar kinderen al kennis mee hebben gemaakt.

Kolommen

Het is soms spraakgebruik om te zeggen dat je bij optellen of aftrekken onder elkaar *per kolom* rekent. Maar onafhankelijke kolommen die los van elkaar opereren zijn het niet. Kijk bijvoorbeeld naar de optelling die is weergegeven in het HTE-schema:

H T E

5 6 1

<u>3 8 7</u> +

8 14 8 (8 honderdtallen, 14 tientallen, 8 eenheden)

9 4 8 (9 honderdtallen, 4 tientallen, 8 eenheden)

Het optellen is dus niet echt een kolomgebonden of positiegebonden activiteit. Telkens kunnen ook alle linksgelegen posities van het bovenste getal meedoen. Van 561 kun je zeggen dat het 5 honderdtallen, 6 tientallen en 1 eenheid zijn. Maar het is niet de enige manier om tegen dit getal aan te kijken. Je kunt ook zeggen dat het 561 eenheden zijn. Of: er zijn 56 tientallen en 1 eenheid. Deze flexibiliteit is kenmerkend voor het plaatswaardestelsel.

Taal en getallen

Een aantal kan op veel manieren als getal worden gerepresenteerd. Afgezien van ons huidige getallenstelsel is het Romeinse stelsel het bekendste. Die verschillende representaties hebben ook verschillende eigenschappen. Als illustratie neem ik een eigenschap die niet onbekend is: om erachter te komen of een getal door 3 deelbaar is, tel je de cijfers van het getal op. Als die som deelbaar is door 3 is het oorspronkelijke getal dat ook:

Bijvoorbeeld 27: 2 + 7 = 9, dus 27 is deelbaar door 3.

Schrijven we 27 in Romeinse cijfers (XXVII), dan valt daar helemaal niets mee aan te vangen. Er is helemaal geen verschil tussen de waarde van het symbool en de gerepresenteerde waarde. Optellen van de symbolen brengt ons geen stap verder:

X + X + V + I + I = XXVII

Dit illustreert dat een getal niet alleen een combinatie van kolommen is, maar dat het samenspel van de cijfers mede de eigenschappen van het getal bepaalt.

Van 437 kun je zeggen dat het 4 honderdtallen, 3 tientallen en 7 eenheden zijn. Maar: ik heb 437 eenheden geteld. Of: er zijn 43 tientallen en 7 eenheden. Bij 1700 kun je zeggen: duizend zevenhonderd, het is 1 duizendtal en 7 honderdtallen. Je kunt ook zeggen zeventienhonderd, ofwel 17 honderdtallen. Het getal 713554825 wordt uitgesproken als zevenhonderddertien miljoen vijfhonderdvierenvijftig duizend achthonderdvijfentwintig (eenheden).

De taal dwingt juist wel tot een kolomsgewijze uitspraak, waarbij de kolommen geen eenheden, tientallen en honderdtallen zijn, maar eenheden, duizendtallen en miljoentallen. De eerste kolom telt van 0 tot 999. In de nieuwste Nederlandse spelling (*Het groene boekje*) staat er ook een spatie tussen twee groepjes van drie cijfers (Permentier, 2005, 48-49). Bij het hoofdrekenen wordt meestal in sterke mate gebruikgemaakt van taal.

Eigenlijk is het alleen met behulp van taal of andere hulpmiddelen mogelijk een getal in kolommen op te splitsen. In het positiestelsel gaat dat niet. Want we kunnen wel zeggen dat we 437 opsplitsen in kolommen door het te zien als som van 400, 30 en 7 en zeggen dat 400 *vier* honderdtallen zijn. Maar in feite staat 400 voor 4 honderdtallen + 0 tientallen en 0 eenheden. In het plaatswaardestelsel kunnen we geen enkele positie onbezet laten.[1]

Als we een getal in Romeinse cijfers schrijven, kan dat wel. Bijvoorbeeld *C* is honderd en daar hoeft, of eigenlijk kan, geen melding worden gemaakt dat er *0* tientallen en *0* eenheden zijn. De Romeinen kenden het cijfer 0 ook helemaal niet. Zo is *MXX* gelijk aan 1020, zonder dat melding hoeft te worden gemaakt dat er 0 honderdtallen en 0 eenheden zijn. Dit geldt voor vrijwel alle getallenstelsels die aan het positiestelsel vooraf gingen.

De kracht van het positiestelsel blijkt al snel als we een getal met 10 vermenigvuldigen. We hoeven alleen een 0 toe te voegen. In de taal blijft in dat geval van de woorden waarin het getal aanvankelijk is benoemd, weinig over. Als tweehonderdzevenendertig met 10 wordt vermenigvuldigd, krijgen we tweeduizend driehonderdzeventig. Voor alle getallen (boven de negen) die met 10 worden vermenigvuldigd, geldt in de taal een dergelijke gedaanteverwisseling. Dat geldt ook voor de Romeinse getallen. CCXXXVII met 10 vermenigvuldigd wordt MMCCCLXX.

Neem ook het geld als voorbeeld. Het geld in je portemonnee is 'kolomsgewijsgeld'. Stel, je hebt € 23,50 in munten en biljetten, dus twee biljetten van € 10, drie munten van € 1 en een munt van € 0,50. Vertienvoudig dat en alles moet vervangen worden: twee biljetten van € 100, drie biljetten van € 10 en een biljet van € 5. Daarentegen is geld op de bank 'plaatswaardestelselgeld'. Alles wat er moet gebeuren om je geld op de bank te vertienvoudigen is op je rekeningafschrift een 0 toe te voegen aan het saldo (een kleinigheidje…).

Anders dan in het Romeinse stelsel bepaalt het samenspel van de cijfers uit het getal de eigenschappen van dat getal. Als de kinderen op de basisschool voortdurend krijgen ingeprent dat een getal een constructie is die is opgebouwd uit kolommen, wordt een veel te mager getalinzicht gevormd.

---

[1] Het is ook leerzaam naar lesmateriaal voor rekenen te kijken. Met MAB-materiaal bestaat uit losse stukken hout en gebruikt het plaatswaardestelsel niet. Een eenheid is een klein vierkantje. Een enkel MAB-staafje is tien vierkantjes lang. Een MAB-honderdveld is een vierkant van tien bij tien vierkantjes. Zo ontstaan steeds grotere blokken om getallen te representeren. Een MAB-blok dat een miljoen voorstelt zou een kubus zijn met ribben van 1 meter. Getalkaarten gebruiken wel het getallenstelsel. Een miljoen wordt hier eenvoudigweg voorgesteld door een kaart waarop een 1 met zes nullen staat. Hetzelfde geld voor de abacus. Op een abacus met zes staafjes kan tot 10 miljoen worden geteld. Door een enkel staafje toe te voegen kan er verder tot 100 miljoen worden geteld.

Nog terzijde: het feit dat het Nederlands (anders dan het Arabisch of Hebreeuws) van links naar rechts leest is natuurlijk een lastigheid, maar bepaald niet onoverkomelijk. Een analyse van de resultaten van het PISA-onderzoek uit 2003 in verschillende landen laat zien dat in Vlaanderen, waar in sterke mate volgens de klassieke algoritmes wordt gerekend, de rekenprestaties beter zijn dan in Nederland (De Lange, 2006).

Trucjes

We keren nu terug naar het positiestelsel. Het is bij de voorstanders van het realistische rekenen gebruikelijk om bij de volgende som te roepen dat het bij deze vorm van optellen om het toepassen van een trucje gaat.

352
<u>413</u> +
765

Het inzicht van de basisschoolleerlingen wordt in de knop gebroken als 2 + 3, 5 + 1 en 3 + 4 wordt uitgerekend. De kinderen beseffen dan niet dat er tientallen en honderdtallen worden opgeteld! Het moet dus per kolom. Die van de honderdtallen ziet er zo uit:

300
<u>400</u> +
700

Maar hier wordt niet, zoals je in de taal kunt zeggen driehonderd en vierhonderd opgeteld. Op alle posities wordt de optelling uitgevoerd:

3 + 4 = 7
0 + 0 = 0
0 + 0 = 0

Waarom zou het optellen van 2 en 3, 5 en 1, 3 en 4 een trucje zijn en waarom is de optelling 0 + 0 dat niet?

Kolomsgewijs optellen

Kinderen leren rekenen illustreert het kolomsgewijs optellen aan de hand van het volgende voorbeeld, waarbij via ‘verkorten’ naar het standaardalgoritme kan worden overgestapt.

a)	463	b)	463	c)	463
	382 +		382 +		382 +
	700		5		845
	140		140		
	5 +		700 +		
	845		845		

Hierbij wordt het standaardalgoritme onder c gekarakteriseerd als de ‘ultieme verkorting’ van het kolomsgewijs algoritme onder a.
De optellingen onder a en b zullen voor weinig kinderen problemen opleveren. Als we andere getallen kiezen is dat minder vanzelfsprekend:

2565
6788 +
8000
1200
140
13 +
9353

Kinderen die niet zo makkelijk rekenen zullen dit moeilijker uit hun hoofd kunnen uitrekenen. En bij optellingen waar meer getallen worden opgeteld wordt het echt lastig.

Kolomsgewijs:	Traditioneel:
883	883
758	758
468 +	468 +
1900	2109
190	
19 +	
2090	
19 +	
2109	

In beide uitvoeringen worden dezelfde tientaloverschrijdende optellingen gemaakt:

8 + 7 = 15	3 + 8 = 11
15 + 4 = 19	11 + 8 = 19
8 + 5 = 13	8 + 5 = 13
13 + 6 = 19	14 + 6 = 20
3 + 8 = 11	8 + 7 = 15
11 + 8 + 1 = 20	17 + 4 = 21

Op beide manieren wordt elk sommetje van rechts naar links uitgevoerd, alleen verschilt de volgorde. Bij de kolomsgewijze aanpak moet er alleen nog veel extra's worden gedaan.

Stel dat het grootste van de twee getallen die moeten worden opgeteld *n* cijfers heeft. Bij het klassieke algoritme zijn voor het uitrekenen van het antwoord maximaal 2n cijfers nodig: het resultaat van de optelling en elke keer eventueel de 'carry' (van 1 onthouden). Voor het kolomsgewijs algoritme is dat voor elk cijfer van het grootste getal een getal onder de streep (dus n x n cijfers). Niet alle cijfers links hoeven te worden ingevuld. Het aantal cijfers tussen de strepen kan oplopen tot ½n x n + 1½n. Het komt erop neer dat het kolomsgewijs algoritme ongeveer ½n (n + 1) cijfers extra nodig kan hebben. Dus bij een optelsom waarvan een van de getallen 20 cijfers heeft, heeft de traditionele methode 40 cijfers nodig en de realistische 10 x 21 = 2100 cijfers…

Zelfs met de enorme nadruk op hoofdrekenen in het tegenwoordige realistische rekenen is de grens voor de meeste leerlingen al snel bereikt. Als de som 1900 + 190 + 19 = uit het hoofd moet worden gemaakt, vallen er heel wat kinderen af. Niettemin vertelt *Kinderen leren rekenen* niet hoe je dit anders zou moeten doen. Over een mogelijk volgende iteratieslag (rekenslag) wordt helemaal niets gezegd. Daarbij moeten we bedenken dat het bij het klassieke algoritme nooit nodig is meer dan twee cijfers + de 1 'van één onthouden' tegelijkertijd te onthouden, hoe groot de getallen waarmee gerekend wordt ook zijn.

Kolomsgewijs aftrekken

527 is 5 honderdtallen, 2 tientallen en 7 eenheden. Maar ook 527 eenheden of 52 tientallen en 7 eenheden. Of anders opgeschreven:

$527 = 5 \times 10^2 + 2 \times 10 + 7 = 52 \times 10 + 7$

Van deze eigenschap maakt het standaardalgoritme gebruik bij het aftrekken:

527

361 -

2 tientallen – 6 tientallen gaat niet. Maar we kunnen onze taak ook formuleren als:
52 tientallen – 6 tientallen en dan is er geen vuiltje aan de lucht. In de wereld van de kolommenmannen en -vrouwen moet de som onttakeld worden tot:

500 – 300 =
20 – 60 =
7 – 1 =

Dat kan natuurlijk niet, tenzij negatieve getallen worden geïntroduceerd. En dat voor kinderen uit groep 5, die in de verste verte niet hebben geleerd 'onder 0' te tellen. Dit wordt pas op ordelijke wijze in het voortgezet onderwijs geïntroduceerd. Dit leidt in de rekenboeken voor groep 5 tot allerlei kunstgrepen. In *Kinderen leren rekenen* wordt de volgende strategie gepresenteerd:

	845
	382 –
800 – 300	500
40 – 80	–40
5 – 2	3
	463

Voor de auteurs is de situatie kennelijk ook verwarrend: bij de laatste sommatiestreep wordt geen + of – meer toegevoegd.

Het TAL-team geeft ook een in haar ogen aantrekkelijk alternatief algoritme (Van den Heuvel-Panhuizen e.a., 2000, 81):

7 5 3 8
2 8 4 2 –
5 **3** **1** 6
4 7 **1** 6
4 6 9 6

De vetgedrukte cijfers (in het boek omcirkelde cijfers) beduiden: de uitkomst van 5 min 8 is een tekort van 3 (een negatief getal), enzovoort. Een net iets ander aftrekgetal maakt het nog omslachtiger. De lezer kan deze techniek uitproberen op bijvoorbeeld: 7538 – 2849 =

Vermenigvuldigen

In het reguliere onderwijs wordt voor vermenigvuldigen de kolomsgewijsmethode als aanvaardbaar eindstation gezien, zo geeft *Kinderen leren rekenen* aan (Treffers e.a., 2000). Het vermenigvuldigen van twee getallen van twee cijfers is op deze manier al lastiger dan in de traditionele methode, grotere vermenigvuldigingen zijn kolomsgewijs niet uitvoerbaar (zie Van der Craats in hoofdstuk 2 van deze bundel en ook Elzinga, 2006).

Algemener gesteld, als kinderen niet cijferend leren vermenigvuldigen moet al het verdere rekenen grotendeels door optellen en aftrekken, herhaald optellen en herhaald aftrekken plaatsvinden, inclusief grotere vermenigvuldigingen. Dat geldt noodgedwongen dan ook voor het delen. Dit is conceptueel een stap terug naar een primitiever rekenniveau. Zonder fatsoenlijk te kunnen aftrekken en vermenigvuldigen wordt ook het delen een heikele aangelegenheid.

Conclusie over kolomsgewijs rekenen

Het kolomsgewijs rekenen is in de praktijk alleen uitvoerbaar met kleine getallen. Het heeft zin als didactisch hulpmiddel. In het realistische rekenen is het twee jaar lang, in groep 5 en groep 6, de techniek waarmee moet worden gerekend. Het wordt zelfs in sommige gevallen als eindniveau geaccepteerd. In het speciaal basisonderwijs (sbo) is dat expliciet het geval. In een door het ministerie van OCW ondersteund project is een map voor de scholen voor speciaal basisonderwijs ontwikkeld waarin ondubbelzinnig wordt gesteld dat daar het cijferen niet hoeft te worden aangeboden (Eerhart & Hanepen, 2004). Zie hiervoor ook Milikowski en Milikowski in hoofdstuk 20 van deze bundel.

TAL vindt, zo zagen we, het van links-naar-rechts-rekenen (van groot naar klein) i.p.v. het van rechts-naar-links-rekenen (van klein naar groot) het onderscheidende punt van het kolomsgewijs rekenen. Deze gedachte klopt conceptueel echter niet en leidt tot zeer kunstmatige oplossingen. Het rekenen kent bewegingen in beide richtingen. We zijn ingegaan op de richting bij het tellen en de standaardalgoritmes. Voor het vergelijken van groottes van getallen beginnen we met het cijfer dat de grootste waarde vertegenwoordigt (ook wel het ‘most significant’-cijfer genoemd), dus links. Voor deelbaarheid door 3 of 9 is links-rechts helemaal niet relevant. Door het getalinzicht voornamelijk op kolommen te baseren, wordt een gereduceerd getalbeeld gevormd, waarmee de kinderen tekort wordt gedaan. Werken met grotere getallen komt hierdoor vaak pas laat aan de orde, terwijl kinderen het vaak juist spannend vinden daar op avontuur te gaan.

Alternatief

In het schema van TAL wordt in de laatste schooljaren overgestapt van het kolomsgewijs rekenen naar het traditionele cijferen voor optellen en aftrekken. Het vindt ook zijn neerslag in de brief van De Zwaluw die we aan het begin van dit hoofdstuk aanhaalden. Maar hoeveel afbreuk is er inmiddels gedaan aan het enthousiasme om dit te onderwijzen? De leerkrachten hebben immers van alle kanten gehoord dat het ware rekenen van links naar rechts plaatsvindt. Dat sluit aan bij de kinderziel. Onder elkaar rekenen is het manipuleren van cijfers, het zijn trucjes. Het is gedachteloos rekenen volgens een recept, het is mechanistisch, het is koopmansrekenen. En voor dit kwalijke product moet vervolgens de leergierigheid van de kinderen worden gewonnen.

Daarbij bedenke men nog dat in het hele basisonderwijs onder invloed van het realisme met het cijferen een jaar later wordt begonnen. Er is nog maar heel beperkte tijd over om routine op te bouwen met de klassieke rekenalgoritmes. Al met al zonde van de tijd: een jaar later beginnen met cijferen, dan twee jaar aan de slag met het kolomsgewijze boemeltje en vervolgens moeten in korte tijd de echte rekenalgoritmes worden geleerd. Dat komt dan dus niet meer goed, het wordt geen echte routine meer. De resultaten zien we ook terug in het PPON-onderzoek (Jansen e.a., 2005). En we mogen nog van geluk spreken want, zo meldde Van den Heuvel-Panhuizen op de Panamaconferentie in 1998: 'de roep om het cijferen af te schaffen heeft het in Nederland tot nu toe niet gehaald' (Van den Heuvel-Panhuizen, 1998, 27). TAL koos gelukkig niet voor deze koers, maar die roep is ook nu nog niet verstomd.

Het alternatief dat de jeugd wordt geboden is hoofdrekenen, schattend rekenen en de rekenmachine. In de genoemde beschouwing stelt Van den Heuvel-Panhuizen: 'Samen met het hoofdrekenen kan het schattend rekenen gezien worden als de grondslag voor gecijferdheid' (Van den Heuvel-Panhuizen, 1998). Natuurlijk, hoofdrekenen is leuk, maar de enorme nadruk die er door TAL op wordt gelegd, heeft zijn keerzijde. Het heeft, zo bleek bij het PPON-onderzoek, tot gevolg gehad dat leerlingen sommen die zij wellicht op papier hadden kunnen uitrekenen, nu tevergeefs uit hun hoofd probeerden te beantwoorden. In een paniekreactie wordt nu dan weer opgeroepen de kinderen erop te wijzen dat ze kladpapier moeten gebruiken.
Over het schattend rekenen – dat overigens in het TAL-boek gedegen wordt behandeld , hebben we een opmerking gemaakt in "De bananesom revisited" (Milikowski,2008)

In de *Panama-post* schrijft W. Uittenbogaard (2007, 33): 'Onze traditionele cijferalgoritmen voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen hebben, als ultieme verkortingen hun uiteindelijke vorm gekregen in de zeventiende eeuw vooral ten behoeve van de handel.' En, zo is de conclusie, de traditionele cijferalgoritmes hebben hun tijd gehad. Maar de associatie van handel met traditionele cijferalgoritmes is erg flauw. De bij tijd en wijle gebruikte term 'koopmansrekenen' is al even suggestief.

Zeker, de cijferalgoritmes zijn vervolmaakt in de zeventiende eeuw. Het meest bekend is een dun boekje, *De Thiende*, van de in Brugge geboren wiskundige Simon Stevin (1585). Daarin laat hij zien hoe de breuken als decimale breuken in het (tientallig) plaatswaardestelsel kunnen worden uitgedrukt (getallen die in het basisonderwijs als ‘kommagetalen’ door het leven gaan). Ook de verbreiding van het rekenen had in die tijd een geweldige bloei. Maar dat vond niet op afroep van de koopmannen plaats. Marjolijn Kool beschrijft dit proces in *Die conste vanden getale* (1999, 37-38) aldus: ‘De Hindoe-Arabische cijfers en de bijbehorende rekenmethode weten de Romeinse cijfers en het penningrekenen pas volledig te verdringen aan het eind van een eeuwenlang, complex proces dat beïnvloed wordt door de toenemende alfabetisering, de ontwikkeling van de papierprijzen, de handel, de boekdrukkunst, de wiskunde en niet te vergeten het onderwijs.’ Het is waar: in de rekenboeken die in de zestiende en zeventiende eeuw verschijnen, wordt veel gerekend aan de hand van voorbeelden uit de handel. Maar het is ook een machtsvertoon: kijk wat we nu allemaal kunnen uitrekenen. Het bekendste van die boeken is *De Cijfferinghe* van Willem Bartjens uit 1604 (2004, editie Beckers & Kool).

Het hart van die gouden eeuwse rekenmethode is het verkorte rekenen dat met het plaatswaardestelsel en de introductie van de 0 mogelijk werd. De komst van de nieuwe rekenmethoden naar Europa dateert van ver voor de tijd dat de zeventiende-eeuwse koopmannen zelfs nog maar in hun luiers lagen. Leonardo de Pisa behandelde ze in zijn in 1202 verschenen *Liber Abaci*. Leonardo de Pisa (of Fibonacci) beschrijft daarin rekenalgoritmes die niet zo heel veel verschillen van hetgeen tegenwoordig de standaardalgoritmes zijn. Als voorbeeld nemen we zijn beschrijving van het optellen (Siegler, 2002, 40):

74	En als u te weten wilt komen wat de som is van 25 en 49, wordt de 49
	onder de 25 geplaatst, net als men zou doen om de een met de ander te
25	vermenigvuldigen. Men telt de 9 bij de 5 op. Men krijgt dan 14. Men zet
49	de 4 boven de eerste positie en onthoudt de 1 met de hand bestemd voor
	de tientallen. Zij wordt bij de 4 en de 2 opgeteld. Dit wordt 7 die wordt
	neergezet. En zo wordt 74 verkregen als som. En dit is getoond.

Het verschil met het standaardalgoritme is slechts een stilistische kwestie. Dus als we terug willen gaan naar de tijd vóór de standaardalgoritmes belanden we allereerst in de twaalfde eeuw. Dit markeert het begin van de verkorte cijferalgoritmes in Europa. Leonardo de Pisa (ofwel Fibonacci) schreef zijn boek na gereisd te hebben door de Arabische wereld en daar kennis te hebben gemaakt met de wiskunde die daar was ontstaan. Iets van die wiskunde was te zien in het *Institut du Monde Arabe* in Parijs. Daar werd in 2005 de expositie *l’âge d’or des sciences Arabe* gehouden, over de bloeitijd van de wetenschappen in de Arabische wereld tussen de achtste en vijftiende eeuw. Indrukwekkend waren de niet zelden modern ogende manuscripten van de Arabische wiskundigen en sterrenkundigen. In de museumwinkel lag de Franse vertaling van het werk van de wiskundige Al-Kwārzimi uit de negende eeuw. Ook daarin treft men al verkorte cijferalgoritmes aan (Al-Kwārzimi, editie 1992). Het bijzondere van het in India ontstane plaatswaardestelsel is dat er zo efficiënt mee gerekend kan worden. Daar dankt het ook zijn succes aan.

Slot

Het kolomsgewijs rekenen wordt aangeprezen met argumenten die niet stroken met het feitelijk functioneren van het plaatswaardesysteem. Het wordt vooral met modieuze redeneringen aantrekkelijk gemaakt. Het is de obsessie van een tijdvak dat de klassieke rekenregels op de schop zouden moeten, met als resultaat dat Daan en Sanne niet kunnen rekenen, zoals Jan van de Craats op de 25ste Panamaconferentie in januari 2007 uiteenzette. Met ongeloof luisterden de aanwezigen naar zijn betoog. Maar het is echt waar, de klassieke rekenalgoritmes voldoen nog prima en er is nog niets beters bedacht.

Juni 2008

Literatuur

Al-Kwārzimi, Muhammed_Ibn Mūsā (1992). *Le calcul indien (Algorismus)*. Samengesteld, vertaald en bewerkt uit het Latijn door A. Allard. Paris: Libraire Scientifique et Technique Albert Blanchard.

Bartjens, W. (2004). De Cijfferinghe. In D. Beckers & M. Kool (red.), *Willem Bartjens 'De Cijfferinghe' (1604). Het rekenboek van de beroemde schoolmeester*. Hilversum: uitgeverij Verloren.

De Zwaluw (2005) *Het kolomsgewijs rekenen en cijferen in Pluspunt*. www.rekenentrale.nl/Documenten/Brief_DeZwaluw.pdf

Eerhart, S. & Hanepen, E. (red.). (2004). *Optellen en aftrekken tot 100 en tot 1000, Realistisch rekenen in het speciaal (basis)onderwijs.* Katern kolomsgewijs rekenen en katern lessenseries. Utrecht: Freudenthal Instituut.

Elzinga, A. (2006) Rekenen wordt zo een raadseltje. *J/M Ouders*, juni 2006.

Gravemeijer, K., van den Heuvel-Panhuizen, M., van Donselaar, G., Ruesink, N., Streefland, L., Vermeulen, W., te Woerd, E. & van der Ploeg, D. (1994). *Methoden in het reken-wiskundeonderwijs, een rijke context voor vergelijkend onderzoek*. Culemborg: Technipress.

Heuvel-Panhuizen, M. van den (1998). Bomen over rekenen boven 2000. In R. Keijzer & W. Uittenbogaard (red.), *Overzicht en samenhang. Verslag van de 17de Panamanajaarsconferentie* (pp. [11-34 Utrecht: Freudenthal Instituut.

Heuvel-Panhuizen, M. van den, Buys, K. & Treffers, A. (red.). (2000). *Kinderen leren rekenen. Tussendoelen Annex Leerlijnen. Hele getallen, Bovenbouw basisschool*. Groningen: Wolters-Noordhoff.

Janssen J., van der Schoot, F. & Hemker, B. (2005). *Balans van het reken-wiskundeonderwijs aan het eind van de basisschool. Uitkomsten van de vierde peiling in 2004*. PPON-reeks, nr. 32. Arnhem: Cito-groep.

Kool, M. (1999). *Die conste vanden getale, een studie over Nederlandstalige rekenboeken uit de vijftiende en zestiende eeuw, met een glossarium van rekenkundige termen.* Hilversum: Uitgeverij Verloren.

Lange, J. de (2006). Van voor naar achter. In T. Dekker, K. Lagerwaard, J. de Lange, G. Limpens & M.M. Wijers, *Wiskundige geletterdheid volgens PISA - Hoe staat de vlag erbij?* 1. Analyse (pp. 21-46. Utrecht/Arnhem: Freudenthal Instituut-PISA/Cito-groep.

Milikowski, R (2008) In De geluukige rekenklas, redactie T. Braams, M. Milikowski, Amsterdam, uitg Boom. (verschijnt september 2008)

Permentier, L. (2005). Leidraad. In Instituut voor Nederlandse Lexicologie, *Het Groene Boekje, Woordenlijst Nederlandse Taal* (pp. 13-120). Tielt/Den Haag: Lannoo/Sdu Uitgeverij.

Siegler, L.E. (2002). *Fibonacci's Liber Abacci, Leonardo Pisano's Book of Calculation*. New York: Springer Verlag. (*De Liber Abaci* van Leonardo de Pisa verscheen oorspronkelijk in het Latijn in 1202 in Italie.)

Stevin, S. (1585). *De Thiende, leerende door onghehoorde lichticheyt allen rekeningen onder den Menschen noodig vallende, afveerdighen door heele ghetalen sonder ghebrokenen*. Leiden: Plantijn.

Treffers, A., Nooteboom, [A] & de Goey, E. (2000). Kolomsgewijs rekenen en cijferen. In M. van den Heuvel-Panhuizen, K. Buys & A. Treffers (red.), *Kinderen leren rekenen. Tussendoelen Annex Leerlijnen. Hele getallen, Bovenbouw basisschool* (pp. 65-90 Groningen: Wolters-Noordhoff.

Uittenbogaard, W. (2007). Hoe Juliette en Jonas leren rekenen. *Panama-Post*, *26* (1), 32-37.